Chceme nalézt všechna maximální řešení rovnice $y' = y^{\frac{3}{5}} \tan x$.

Je to rovnice se separovanými proměnnými, tedy ve tvaru $y' = f(x)g(y)$ pro $f(x) = \tan x$ a $g(y) = y^{\frac{3}{5}}$. Budeme postupovat klasickým 6 krokovým postupem:

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ a tedy dostáváme maximální intervaly $I_k = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

2. $D_g = \mathbb{R}$, nulový bod funkce g je 0, dostáváme tedy maximální intervaly $J_1 = (-\infty, 0), \quad J_2 = (0, \infty)$.

3. Stacionární řešení $y_{1,k}(x) = 0$, $x \in I_k$.

4. $F(x) = -\log|\cos x| \quad I = I_k, k \in \mathbb{Z}, \qquad G(y) = \frac{5}{2}y^{\frac{2}{5}}, \quad J = J_1, J_2$

5. Postupně probereme možné kombinace I_k a J_l. Nejdříve $I = I_0$, $J = J_1$, zde máme

   $$F(x) = -\log(\cos x), \quad G(y) = \frac{5}{2}y^{\frac{2}{5}}, \quad G(J) = (0, \infty), \quad G^{-1}(t) = -(\frac{2}{5})^{\frac{5}{2}} t^{\frac{5}{2}}.$$

   Rozebereme jednotlivé případy pro $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$ dává

   $$\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

   A dostáváme řešení ve tvaru

   $$y_{2,0}(x) = -\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{2}} (C - \log(\cos x))^{\frac{5}{2}},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

   Pro případ $C \leq 0$ dostáváme

   $$\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\} = (-\frac{\pi}{2}, -\arccos e^C) \cup (\arccos e^C, \frac{\pi}{2})$$

   Dostáváme tedy dvě řešení

   $$y_{3,0}(x) = -\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{2}} (C - \log(\cos x))^{\frac{5}{2}},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\arccos e^C\right)$$
   $$y_{4,0}(x) = -\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{2}} (C - \log(\cos x))^{\frac{5}{2}},\ x \in \left(\arccos e^C, \frac{\pi}{2}\right).$$

   Obdobně pro $I = I_0$ a $J = J_2$ dostaneme řešení

   $$y_{5,0}(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{2}} (C - \log(\cos x))^{\frac{5}{2}},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
   $$y_{6,0}(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{2}} (C - \log(\cos x))^{\frac{5}{2}},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\arccos e^C\right)$$
   $$y_{7,0}(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{2}} (C - \log(\cos x))^{\frac{5}{2}},\ x \in \left(\arccos e^C, \frac{\pi}{2}\right).$$

6. Protože pro $C \leq 0$ platí

   $$\lim_{x \to \pm \arccos e^C} \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{2}} (C - \log(\cos x))^{\frac{5}{2}} = 0$$

můžeme v bodech $\pm \arccos e^C$ lepit dostaneme kromě původních $y_{1,0}$, $y_{2,0}$ a $y_{5,0}$ (která už jsou maximální) ještě další maximální řešení (pro $C \le 0$) ve tvaru

$$\widetilde{y}_{1,0}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \arccos e^C\right) \\ \pm \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{2}} (C - \log(\cos x))^{\frac{5}{2}}, & x \in \left[\arccos e^C, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

a

$$\widetilde{y}_{2,0}(x) = \begin{cases} \pm \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{2}} (C - \log(\cos x))^{\frac{5}{2}}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\arccos e^C\right] \\ 0, & x \in \left(-\arccos e^C, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases},$$

a tato lepení můžeme i kombinovat, čímž dostaneme řešení

$$\widetilde{y}_{3,0}(x) = \begin{cases} \pm \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{2}} (C - \log(\cos x))^{\frac{5}{2}}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\arccos e^C\right) \\ 0, & x \in \left[-\arccos e^C, \arccos e^D\right] \\ \pm \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{2}} (D - \log(\cos x))^{\frac{5}{2}}, & x \in \left(\arccos e^D, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases},$$

zde musí platit $C, D \le 0$, všechny čtyři kombinace $\pm$ jsou možné. Toto jsou všechna maximální řešení na I_0, maximální řešení na ostatních intervalech I_k pak budou ve tvaru $y_k(x) = y(x - k\pi)$, kde y je nějaké maximální řešení na I_0. Toto snadno ověříme, pro $x \in I_k$ platí

$$y_k'(x) = y'(x - k\pi) = y(x - k\pi)^{\frac{3}{5}} \tan(x - k\pi) = y_k(x)^{\frac{3}{5}} \tan(x).$$

Jednotlivá řešení (před lepením) vypadají následovně: